

Jak vytvářet projekty ve stereometrii na základní škole

Irena Budínová
Pedagogická fakulta MU

Úvod

K rozvíjení prostorové představivosti a získávání poznatků ze stereometrie je vhodné využít projektů, ve kterých žáci přicházejí k pojmům a vztahům vlastní samostatnou činností. Problematika zabývající se mnohostěny nabízí širokou škálu možností manipulativní činnosti, experimentování, upevňování znalostí z planimetrie, objevování mezipředmětových vztahů.

RVP ZV zmiňuje stereometrii na prvním i na druhém stupni. Na prvním stupni „*má žák rozeznat, pojmenovat, vymodelovat a popsat jednoduchá tělesa – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec. Na druhém stupni žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary, analyzuje jejich vlastnosti, odhaduje a vypočítá objem a povrch těles, načrtne a sestrojí síť základních těles, načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině.*“

Jsou-li žáci vedeni experimentálními a manipulativními činnostmi, jsou schopni dosahovat v průběhu vzdělávání následující dovednosti:

- V předškolním vzdělávání rozeznat a pojmenovat jednoduchá tělesa – krychle, kvádr, čtyřlístek, jehlan, koule, kužel, válec.
- Na prvním stupni modelovat různým způsobem mnohostěny, zakreslovat jejich síť, intuitivně zavést pojmy obsah, obvod, objem, povrch.
- Na druhém stupni zabývat se vlastnostmi mnohostěnů, určovat objemy a povrchy těles, řešit problémové úlohy vedoucí na výpočet objemů a povrchů.



Objekty postavené čtyřletým dítětem. Je zřejmý zájem o symetrii i o mnohostěny.

Učitel může podnítit žákův zájem o prostorové útvary zadáváním projektů, v rámci nichž žák manipuluje s tělesy, vytváří mnohostěny nebo jejich sítě, vyhledává související informace a objevuje zajímavé vlastnosti těles.

V následujícím textu jsou uvedeny tři projekty, dva krátkodobé a jeden střednědobý, které je možno zadávat žákům v různých fázích základního vzdělávání. Žáci si pomocí projektů upevňují různé znalosti a objevují zákonitosti v oblasti učiva o mnohostěnech. Projekty postupně vedou až k zavedení pravidelných (platónských) mnohostěnů, což je učivo, které přesahuje běžnou výuku geometrie na základní škole.

Projekt 1

Název: Modelování mnohostěnů pomocí magnetické stavebnice

Cíl projektu: Vytvářet různé druhy mnohostěnů a seznamovat se základními pojmy

Pomůcky: Magnetická stavebnice

Délka projektu: Jedna vyučovací hodina

V rámci tohoto projektu dostanou žáci za úkol sestavovat mnohostěny z magnetické stavebnice podle zadání. Zadáním je přitom pouze to, aby žáci sestavili mnohostěny s daným počtem stěn. Úkolem žáků je zapisovat si údaje pro postavená tělesa do tabulky: počet vrcholů a počet hran. Není vůbec potřeba, aby učitel před zahájením činnosti žákům dával teoretický výklad o tom, co je stěna, vrchol a hrana mnohostěnu. Žáci tyto pojmy chápou intuitivně a je pouze třeba, aby se učitel v průběhu činnosti ujistil, že žáci pochopili pojmy správně:

- kulička je vrchol,
- tyčinka je hrana,
- stěny jsou pouze zvenčí tělesa (jakoby těleso bylo ze dřeva),
- dvě tyčinky mohou tvořit jedinou hranu,
- hrana je vždy přímá, stěna nesmí být pokřivená.

S těmito všemi otázkami se žáci v průběhu manipulace setkají, avšak učitel může být až překvapen, že většina žáků nebude mít problémy pochopit pojmy a vztahy tak, jak jsou.

Učitel nechává žákům naprostou volnost, neupřednostňuje žádná tělesa, která se mu jeví jako „matemicky správná“ (např. u šestistěnnů krychle). Je zajímavé žáky sledovat, že je nezajímá jakákoli pravidelnost, prioritní je pro ně pouze zadaný úkol – těleso s daným počtem

stěn. Tělesa mohou mít nejrůznější tvar, důležité je pouze to, aby se jednalo skutečně o mnohostěn.

Náměty k diskusi

Žáci mohou diskutovat o tom, jaká tělesa se jim podařilo sestavit. Existuje 1 druh čtyřstěnu, 2 druhy pětistěnu (hranol a jehlan), 3 druhy šestistěnu (jehlan, krychle a šestistěnný deltaédr), atd. Žáci mohou porovnávat, kdo postavil které z těchto těles a mohou počítat počty hran a vrcholů u těchto těles – např. krychle má 8 vrcholů a 12 hran, šestistěnný deltaédr 5 vrcholů a 9 hran.

Nabízí se zajímavá otázka – zda je čtyřstěn mnohostěn s nejmenším možným počtem stěn. Učitel by měl žákům nechat prostor, aby alespoň někteří z nich mohli odpověď na tuto otázku zformulovat. Žáci mohou své názory diskutovat.

Závěr

Žáci mohou své mnohostěny vyfotografovat a spolu s tabulkou umístit na třídní nástěnku. Přítomnost výsledků projektu ve třídě může v některých z nich vyvolávat další zájem o mnohostěny a zajímavé otázky, které se zde nabízejí.

Zkušenosti s prací s magnetickou stavebnicí ve 4. třídě ZŠ

O práci se stavebnicí byl velký zájem. Žáci měli možnost pracovat i s dalšími geometrickými objekty, ale předháněli se v tom, kdo bude moci pracovat se stavebnicí.

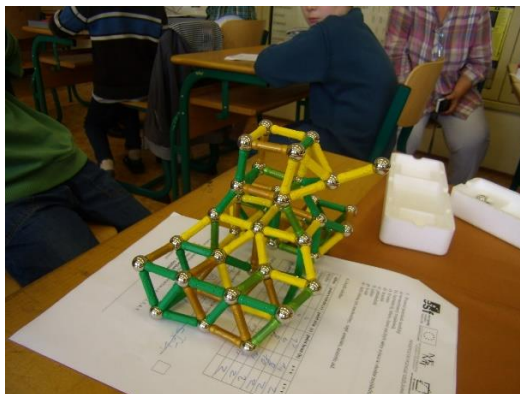


Žáci se skutečně nezajímali o pravidelnost objektů. Velkým problémem pro ně bylo sestavit osmistěn. Podařilo se jim sestavit devítistěn (domeček se šikmou střechou), ale nedokázali přijít na to, jak z něj vytvořit osmistěn. Pomáhali si potom nejrůznějšími způsoby. Na obrázku vlevo je vidět osmistěn postavený jedním z žáků 4. třídy.



Také dívky pracující s plastovou stavebnicí (na obrázku vpravo) narazily na stejný problém. Postavily domeček, ale nepodařilo se jim postavit osmistěn.

Vrcholem činnosti žáků byl tank, který postavili dva chlapci. Věnovali této činnosti neskutečné úsilí a postavili symetrický prostorový útvar, který se těšil obdivu celé třídy. Také u mnohostěnu ve tvaru tanku počítali počet stěn, hran a vrcholů, byla to ale záležitost značně komplikovaná.



Pracovní list: Modelování mnohostěnů z magnetické stavebnice

Jméno: _____

Postav z geomagu tělesa s daným počtem stěn: **čtyřstěn, pětistěn, šestistěn, sedmistěn, osmistěn, devítistěn, desetistěn**. Zapisuj údaje do následující tabulky.

Těleso	Počet stěn n	Počet hran h	Počet vrcholů v

Projekt 2

Název: Určování vlastností mnohostěnů pomoci magnetické stavebnice

Cíl projektu: Zopakovat poznatky z prvního projektu, třídění mnohostěnů podle určitých vlastností, seznámení s pravidelnými mnohostěny, seznámení s Eulerovou větou

Pomůcky: Magnetická stavebnice, drátěné nebo jiné modely pravidelných těles

Délka projektu: Dvě vyučovací hodiny

Ve druhém projektu učitel může navázat na předchozí projekt. Časový odstup obou projektů by měl být několik měsíců. Žáci budou znovu sestavovat mnohostěny podle počtu stěn, avšak tentokrát budou tělesa třídit (jako např. na hranoly, jehlany a jiné) a učitel je již upozorní na některá zajímavá tělesa. Žáci se tak seznamují s pojmy prostorové geometrie: **jehlan, hranol, krychle, čtyřstěn, kvádr**, a jiné. Mohou také pojmenovat stěny těles, jako **čtverec, obdélník, trojúhelník, kosočtverec, pětiúhelník**, aj. a tím opakovat pojmy rovinné geometrie.

V tabulce přibyl další sloupec – žáci mají počítat hodnotu výrazu $n + v - h$. Je-li projekt zařazen do nižšího ročníku, může se jednat o jednu z prvních příležitostí žáků setkat se s algebraickým zápisem, kdy místo konkrétních čísel používáme písmena.

Žáci zjistí, že pro jakékoli těleso, které postaví, má výraz vždy hodnotu 2. Setkali jsme se s různými reakcemi na tento fakt – někteří žáci hned po třetím tělese zhodnotili, že to asi bude vycházet stále 2, ale setkali jsme se i s žákyní, která všechno své úsilí věnovala tomu, aby našla těleso, pro které nevyjde 2. Nakonec se jí podařilo postavit nekonvexní dvacetistěn a radovala se, že tentokrát vzorec opravdu neplatí. Bohužel ale zapomněla počítat vrchol v nekonvexní části mnohostěnu.

Učitel může vyzvat žáky k tomu, aby se pokusili objevenou zákonitost interpretovat. Někteří žáci se jistě pokusí vyslovit určitý vztah mezi počtem stěn, hran a vrcholů – např. budou uvažovat, co se děje, když zvýším počet stěn o jednu. Skutečný důkaz je však pro žáky základní školy náročný.

Uvedený vztah je znám pod názvem Eulerova věta a bývá uváděn ve tvaru

$$n + v = h + 2.$$

Žáci (alespoň někteří) mohou přemýšlet nad tím, proč platí právě vztah $n + v = h + 2$. Při hledání odpovědi na tuto otázku dochází k procesu postupného zobecňování. Žák začíná na konkrétních případech, je např. vhodné zabývat se tím, jak se mění počty stěn, hran a vrcholů, sestavuje-li jehlany, počínaje čtyřstěnem. Máme-li ze čtyřstěnu postavit jehlan s pěti stěnami, přidáme jednu stěnu, ale zároveň přibydou 2 hrany a 1 vrchol. Situaci zapíšeme do tabulky.

	$n + v = h + 2$
Čtyřstěn	$4+4=6+2$
Pětistěn (jehlan)	$5+5=8+2$
Šestistěn (jehlan)	$6+6=10+2$
\vdots	

Žák obdobně může postupovat pro hranoly. Postupně si uvědomuje, že počty stěn, hran a vrcholů jsou spolu vzájemně svázány. Nedojde sice k úplnému zobecnění, ale to u žáků základní školy není ani účelem. Podstatná je badatelská činnost se snahou o najít zákonitosti.

Z kategorií, které žáci rozlišují, se vyčlení jedna obzvlášť zajímavá – **pravidelné (platónské) mnohostěny**. Jsou to tělesa, jejichž stěny tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky a z každého vrcholu vychází stejný počet hran. Žáci podle této specifikace hledají tělesa, která mají dané vlastnosti. Tři z nich již žáci určitě sestavili: **čtyřstěn, krychle, osmistěn**. Zbývající dva, **dvanáctistěn** a **dvacetistěn**, mohou sestavit z magnetická stavebnice s kratšími tyčinkami.



Žák 7. třídy sestavil pravidelný dvacetistěn

Pracovní list: Modelování mnohostěnů z magnetické stavebnice II

Jméno: _____

1. Postav z geomagu tělesa s daným počtem stěn: **čtyřstěn, pětistěn, šestistěn, sedmistěn, osmistěn, devítistěn, desetistěn**. Zapisuj údaje do následující tabulky.

Těleso	Počet stěn n	Počet hran h	Počet vrcholů v	$n + v - h$

2. Jak bys vysvětlil/a výsledky posledního sloupce tabulky?

Projekt 3

Název: Pravidelná (platónská) tělesa a jejich sítě

Cíl projektu: Vyhledávat informace o pravidelných mnohostěnech, vytváření jejich sítí

Zdroje: Encyklopedie, matematická literatura, internet

Pomůcky: Barevné papíry, nůžky, lepidlo

Délka projektu: Dva týdny

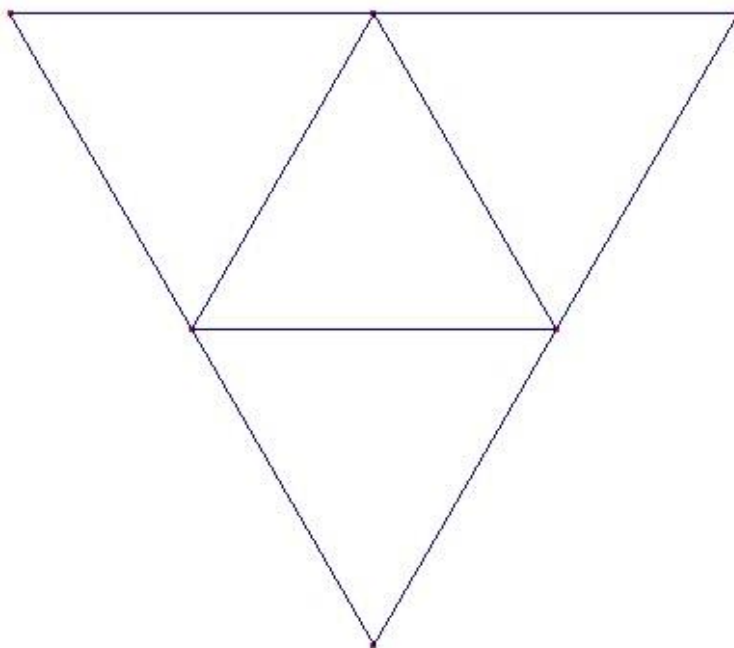
V tomto projektu budou žáci pracovat s informacemi, které budou vyhledávat na internetu nebo v literatuře, se sítěmi pravidelných těles, ale také si mohou pomáhat magnetickou stavebnicí.

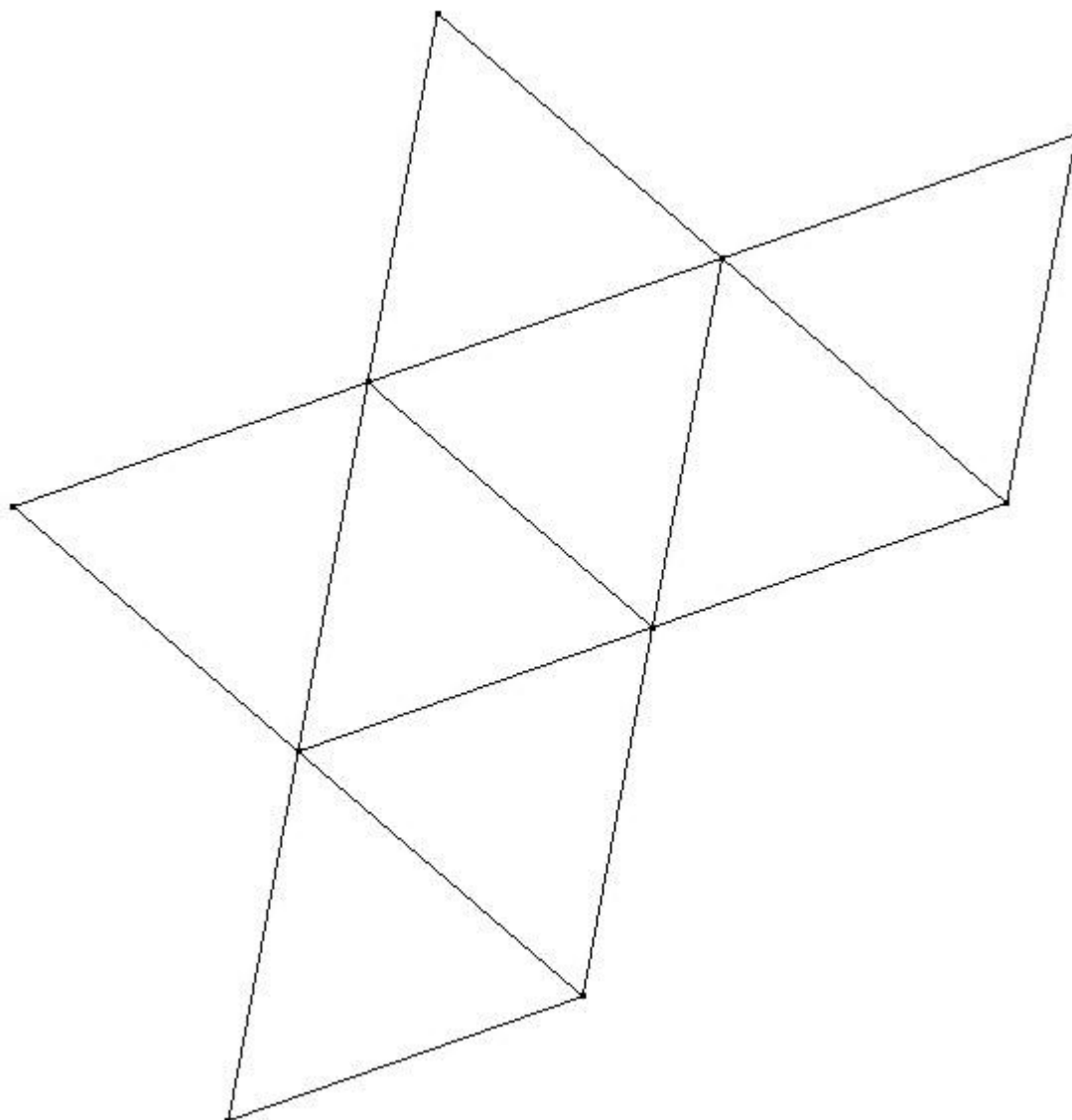
Žáci budou hledat odpovědi na následující otázky, které v sobě skrývají množství mezipředmětových vztahů:

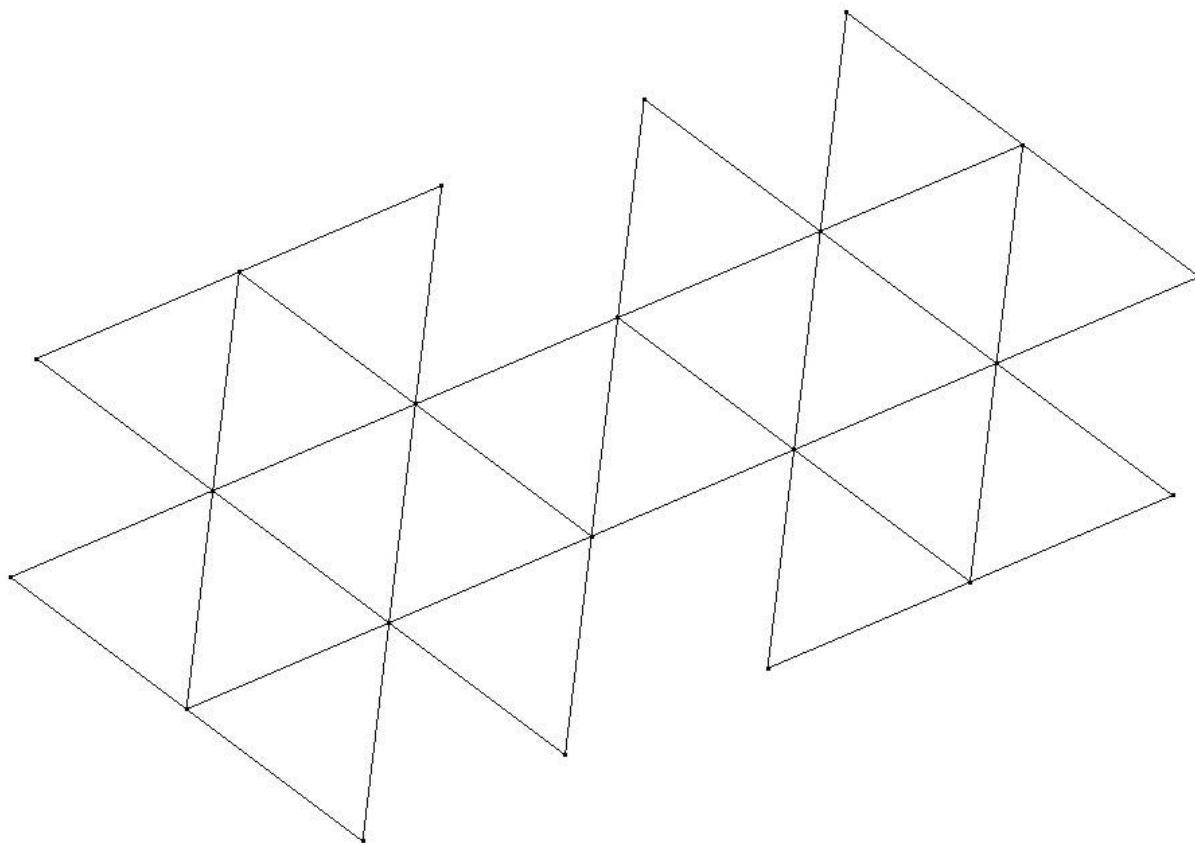
- Kdo byl Platón? Kdy a kde žil? Čím se zabýval?
- Jaká byla pythagorejská představa uspořádání vesmíru?
- Kdo byl Johannes Kepler? Kdy a kde žil? Čím se zabýval? Co je Keplerův model Sluneční soustavy?
- Kdo byl Leonhard Euler? Kdy a kde žil? Co říká Eulerova věta (pro mnohostěny)?
- Kde v přírodě se můžeme setkat s pravidelnými mnohostěny? Které látky a sloučeniny mají tvar pravidelných těles?
- Co je to dualita pravidelných těles?

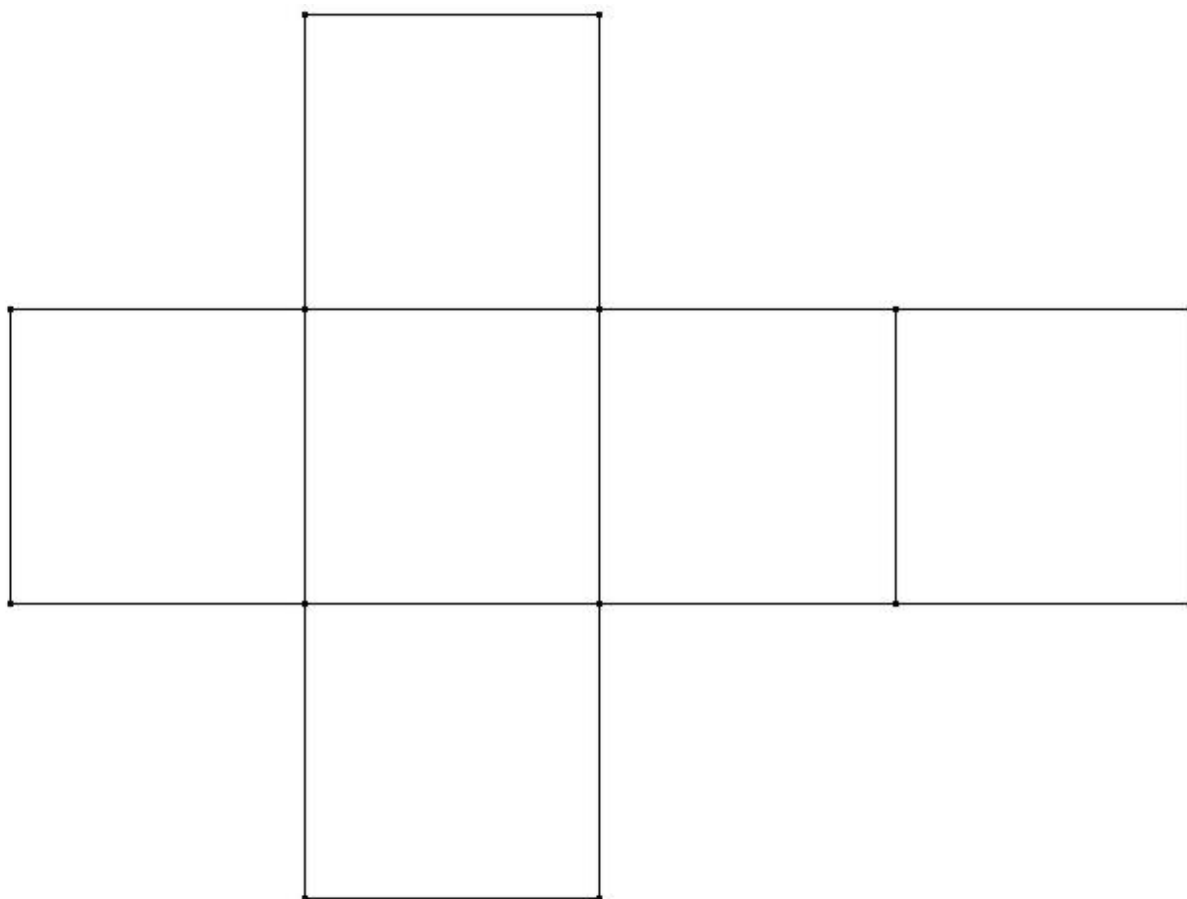
Sítě pravidelných těles mohou žáci najít v matematické literatuře nebo na internetu, mohou je pouze vytisknout a vystříhat, nebo je mohou sami narýsovat. U těles s méně stěnami (čtyřstěn, krychle, osmistěn) by pro ně rýsování mělo být jednoduché, u dvanáctistěnu a dvacetistěnu práce vyžaduje notnou dávku trpělivosti a zručnosti. Protože však zájem dnešních žáků je velmi silně orientován na práci s počítačem, kde vše můžeme vizualizovat a rozvíjet si levou mozkovou hemisféru, je vhodné do výuky zařazovat i manuální činnosti a rozvíjet i pravou mozkovou hemisféru.

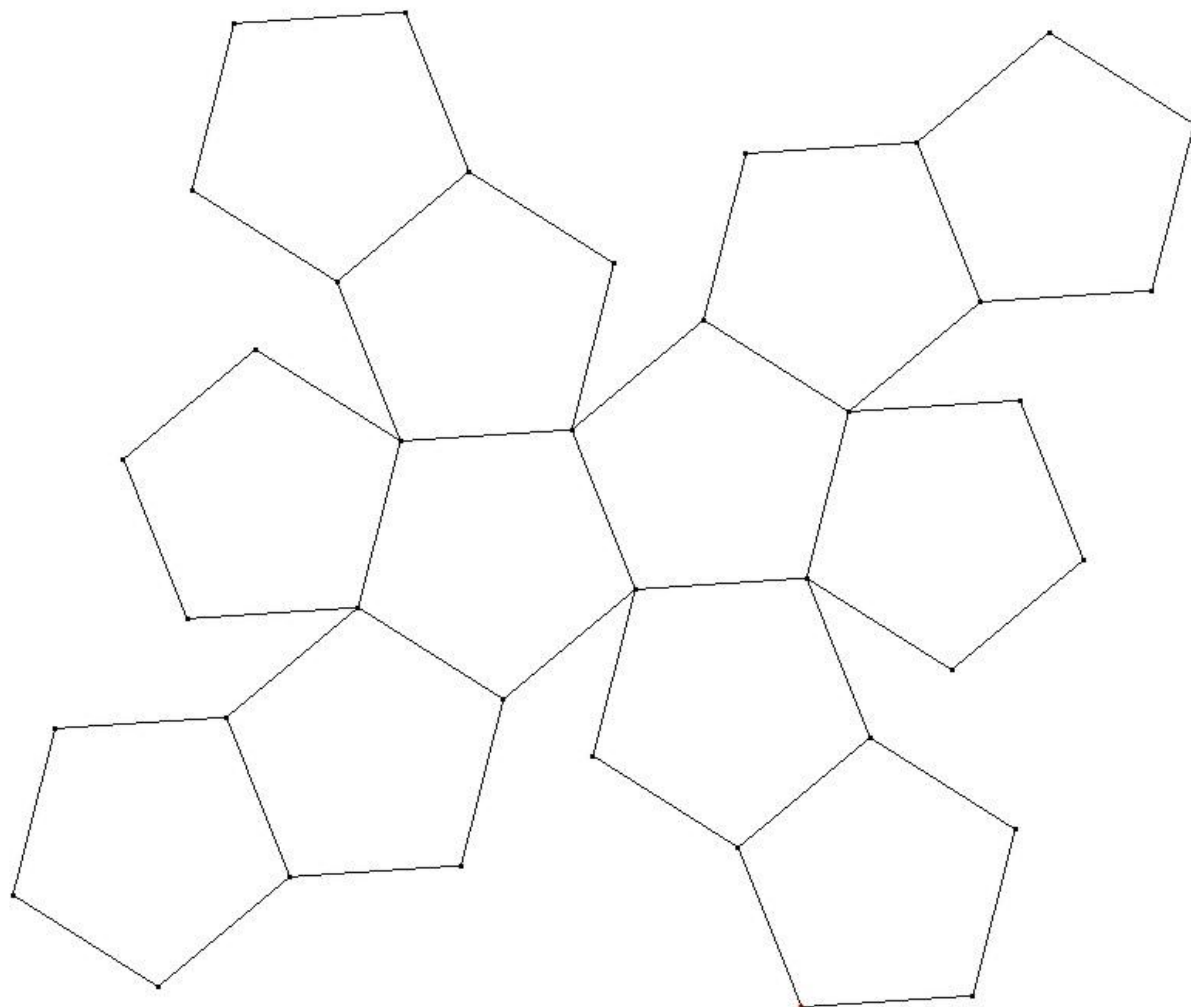
Sítě těles je možno naléznout např. na http://ucse.wz.cz/zajimavosti/n_site.htm











Závěr

Projektová výuka na téma mnohostěny umožňuje žákům zábavným a názorným způsobem pronikat do světa prostorových těles a odhalovat různé matematické zákonitosti. Rozvíjí prostorovou představivost a schopnost využívat dlouhodobou paměť.

První projekt je krátkodobý, může trvat jednu vyučovací hodinu. Jeho úkolem je přitáhnout žákovskou pozornost k mnohostěnům, vymodelovat základní druhy mnohostěnů, všimnout si některých jejich vlastností a seznámit se s novými pojmy. Žáci mohou pracovat samostatně nebo ve dvojicích. Druhý projekt by měl následovat dostatečnou dobu po prvním, může se jednat o půl roku až rok. Jeho úkolem je zopakovat znalosti získané v prvním projektu, utřídit mnohostěny podle určitých kritérií a zaměřit pozornost na pravidelné mnohostěny. Třetí projekt by měl následovat opět s časovým odstupem několika měsíců a zabývá se pravidelnými mnohostěny. Žáci v něm pracují s informacemi, které samostatně vyhledávají a zpracovávají, propojují různé obory (historii, filozofii, fyziku, chemii, biologii a matematiku). Vyrábí síť a sestavují z nich tělesa. Projekt je střednědobý, může trvat dva týdny i déle, aby žáci měli dostatek času informace vyhledat, zpracovat, konzultovat s učitelem a v rámci pracovní skupiny zformovat výstup projektu a jeho prezentaci před spolužáky. Jedná se tedy o skupinový projekt.